Elementi di teoria degli insiemi

1. Insiemi e loro elementi

1.1. Sottoinsiemi – Insieme vuoto

Abbiamo già osservato che ogni numero naturale è anche razionale assoluto o, in altre parole, che l'insieme dei numeri naturali è incluso nell'insieme dei numeri razionali assoluti. Questo concetto di inclusione si può generalizzare ad insiemi di natura qualsiasi.

Infatti dati due insiemi A e B, diremo che A è *contenuto* in B, se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B. Usando il simbolo (detto di *inclusione*)

$$\subseteq$$

come sostitutivo della frase "contenuto in", il fatto che A è contenuto in B può essere scritto in simboli

$$A \subseteq B$$

In questo caso diremo anche che A è **sottoinsieme** di B.

Se B possiede anche elementi che non appartengono ad A, diremo che A è un sottoinsieme *proprio* e useremo il simbolo di inclusione stretta $\subset$:

$$A \subset B$$

Quindi:
Dato un insieme B, diremo che un insieme A è un suo **sottoinsieme** se e solo se

$$\boxed{A \subseteq B}$$

Inoltre A è un **sottoinsieme proprio** di B se e solo se A è contenuto strettamente in B, cioè

$$\boxed{A \subset B}$$

Naturalmente, la *non inclusione* si esprime col simbolo $\not\subset$

Esempio 1

- Siano $A = \{2,3,5\}$; $B = \{1,2,3,4,5\}$; $C = \{5,2\}$; $D = \{7,8\}$

Risulta

$$A \subset B; C \subset B; C \subset A; A \not\subset D.$$

- Siano A={martedì, giovedì, sabato};

  $B=\{x|x$ è un giorno della settimana$\}$.

Risulta

$$A \subset B$$

Esercizio 1

E' vera o falsa la proposizione:

" A è contenuto in B se e solo se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B "?

Dati due insiemi A e B, diremo che essi sono *uguali* e scriveremo $A = B$, se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B e, viceversa, ogni elemento di B appartiene pure ad A. Naturalmente, se A è diverso da B scriveremo $A \neq B$.

Esempio 2

- Le seguenti, sono coppie di insiemi uguali:

1) $A = \{2,3,5\}$; $\quad B = \{5,2,3\}$;

2) $A = \{a,b,d,e\}$; $\quad B = \{b,d,a,e\}$;

3) $A = \{x \in N \mid x \text{ è un numero pari}\}$;

$B = \{x \in N \mid x = 2p \text{ con } p \in N, p \neq 0\}$.

E' facile verificare, in conseguenza delle definizioni precedenti, la validità della seguente proposizione:

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora A=B, in simboli

$$\boxed{((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Leftrightarrow (A = B)}$$

Esercizio 2

Verificare che i seguenti due insiemi sono uguali
$A = \{x \in N \mid x = 2p + 1, p \in N\}$,
$B = \{x \in N \mid x\, \text{è}\, un\, numero\, naturale\, dispari\}$.

- Siano

A={*x*|*x* è una donna che ha ricoperto la carica di presidente della Repubblica Italiana fino al 1984}
B={x|x è un numero pari maggiore di quattro e minore di sei}.

E' facile accorgersi che questi insiemi sono privi di elementi (i Presidenti della nostra Repubblica sono stati tutti uomini; non ci sono numeri pari tra quattro e sei).
Un insieme che non contiene elementi si dice **vuoto** o **nullo** e si indica con il simbolo Ø. E' facile convincersi che per ogni insieme *A* risulta Ø $\subseteq$ *A*.

1.2. Unione e intersezione di insiemi.

Anche con gli insiemi si possono fare delle operazioni, ora ci occupiamo dell'unione e dell'intersezione.

Più in particolare:

Dati due insiemi *A* e *B* , chiamiamo **insieme unione**, quell'insieme costituito dagli elementi, *x*, appartenenti ad *A* o a *B* o ad entrambi.

Se indichiamo l'insieme unione con la notazione $A \cup B$ (da leggersi <<*A* unione *B* >>), possiamo scrivere in simboli

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; o \; x \in B\}.$$

Osserviamo che nel linguaggio comune <<o>> significa di solito disgiunzione (una cosa o l'altra, ma non entrambe); in matematica, invece, può significare una possibilità o l'altra o entrambe.

I diagrammi, detti di Ven, della Fig. 1 visualizzano l'insieme unione (tratteggiato) in relazione alle diverse situazioni (l'insieme *U* rappresenta l'insieme universale).

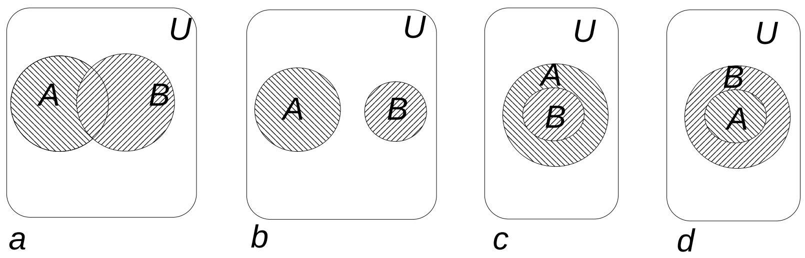


Figura 1

Notiamo che se $A \subseteq B$ (caso d), $A \cup B = B$; e se $B \subseteq A$ (caso c), $A \cup B = A$.

Esempio 3

- Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$ allora $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
- Se N^+ è l'insieme degli interi positivi, cioè $N^+ = \{+1, +2, +3, ...,+100, ...\}$, N^- è l'insieme degli interi relativi negativi, cioè $N^- = \{-1, -2, -3, ..., -100, ...\}$ allora
$$Z = N^+ \cup \{0\} \cup N^-.$$
- Se

A={martedì, domenica, giovedì},
B={sabato, mercoledì, giovedì}

allora

$A \cup B$={martedì, mercoledì, giovedì, sabato, domenica}.

Considerando, altresì, gli elementi comuni a due o più insiemi si ottiene **l'insieme intersezione** di essi. Più precisamente:
Dati due (o più) insiemi A e B, gli elementi comuni costituiscono l'insieme intersezione, che denotiamo con $A \cap B$ (leggasi <<*A intersezione B*>>):
$$A \cap B = \{x \mid x \in A\, e\, x \in B\}.$$

In Fig. 2 è visualizzato l'insieme intersezione (più scuro) in riferimento alle diverse condizioni di A e B.

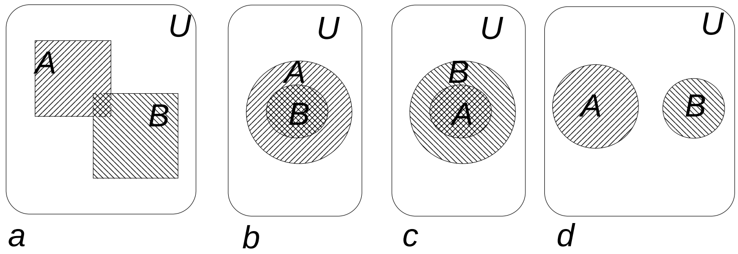


Figura 2

Esercizio 3

Scrivere in simboli la definizione di unione e intersezione di insiemi utilizzando i connettivi logici *"e"*, *"o"* .

Esempio 4

- Se $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,5,6\}$ allora $A \cap B = \{1\}$.
- Risulta
  $Q_a \cap Z = N; \; Q \cap Z = Z; \; Q \cap N = N; \; Q \cap Q_a = Q_a$.
- Se
  A={Maria, Giuseppe, Giorgio}.
  B={Maria, Francesco, Carlo}

allora

$$A \cap B = \{Maria\}.$$

Se due insiemi hanno intersezione vuota si dicono **disgiunti**. Il diagramma (d) di Figura 2 mostra insiemi disgiunti.

Esempio 5

Se $A = \{1,2,3\}, \; B = \{4,5,6\}$ allora $A \cap B = \emptyset$.

1.3. Prodotto cartesiano

Abbiamo già considerato coppie ordinate di numeri, indicandole con

$$(a, b)$$

e intendendo che a è il primo elemento della coppia e b il secondo. La distinzione tra primo e secondo elemento era, in alcuni contesti, fondamentale, perché gli elementi avevano significati diversi. Ad esempio nella sottrazione o divisione nei numeri naturali l'ordine tra i due numeri assegnati è fondamentale per potere eseguire l'operazione stessa. Vogliamo ora estendere il concetto di coppia ordinata nel caso di insiemi generali, per poter, poi, definire altre operazioni.

Supponiamo che un signore disponga di tre vestiti di colore rispettivamente blu, grigio, e nero, e di due cravatte di colore rosso e blu. Ci chiediamo di quanti accoppiamenti vestito-cravatta, di diversi colori, egli può disporre. Se scriviamo prima il colore del vestito e dopo quello della cravatta, tutte le combinazioni possibili sono: blu-blu, blu-rosso, grigio-blu, grigio-rosso, nero-blu, nero-rosso.

Se ora indichiamo l'insieme dei vestiti (elencati con i relativi colori) con *P={blu, grigio, nero}* e l'insieme delle cravatte con *S= {rosso, blu}*, l'insieme degli accoppiamenti sopra citati non è altro che l'insieme di tutte le possibili coppie formate con gli elementi di *P* e *S* in modo, però, che il primo elemento appartenga a *P* e il secondo a *S*. Così la coppia blu-rosso indica vestito blu e cravatta rossa e non viceversa; come pure, la coppia grigio-blu è diversa dalla coppia blu-grigio (nel nostro caso addirittura inesistente, non essendo compreso il colore grigio nell'insieme *S*).

Come si vede, in ciascuna delle coppie precedenti l'ordine è importante; chiameremo, perciò, **coppie ordinate** le coppie di questo tipo.

In generale indichiamo le coppie ordinate di elementi col simbolo

$$\left(S, \Delta \right)$$

ove S rappresenta il primo elemento (che appartiene ad un dato insieme) e Δ il secondo elemento (che può appartenere ad un insieme diverso).

Quindi:

$$(x, y) = (m, n) \text{ se e solo se } x = m, \quad y = n .$$

Dati due insiemi *A* e *B*, a volte è utile considerare insiemi di coppie ordinate formate con i loro elementi. A tale scopo

Definizione 1

Chiamiamo **prodotto cartesiano** di A e B – e lo indichiamo con $A \times B$ – l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Esempio 6

Se P e S sono gli insiemi di cui si è detto all'inizio, allora: *P×S={(blu, blu), (blu, rosso), (grigio, blu), (grigio, rosso), (nero, blu), (nero, rosso)}.*

Esempio 7

Siano $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{2,5\}$; costruire gli insiemi AxB, BxA, AxA, BxB.

Soluzione

AxB={(1,2), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,5)};
BxA={(2,1), (2,2), (2,3), (5,1), (5,2), (5,3)};
AxA={(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)};
BxB={(2,2), (2,5), (5,2), (5,5)}.

1.4. Relazioni

Esercizio 4

Per ciascuno degli insiemi $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ dell'esercizio precedente scrivi i sottoinsiemi formati dalle coppie ordinate:

1) in cui il secondo elemento è 5;

2) in cui il primo elemento è più grande del secondo.

Nello svolgere l'esercizio hai costruito dei particolari sottoinsiemi di coppie ordinate, hai cioè considerato solo quelle tra i cui elementi sussiste una *relazione* (quella indicata dal testo dell'esercizio e in particolare che il secondo elemento sia 5 nel primo caso e che il primo elemento sia più grande del secondo nell'altro caso). Nota che la parola "relazione" è usata molto spesso anche nel linguaggio comune ed esprime un legame tra due persone, cose, oggetti, ...

Esempio 8

a) Giulio è fratello di Maria – "è fratello di" esprime la relazione tra Giulio e Maria;
b) 2875 è il numero di telefono di Enrico – "è il numero di telefono di"esprime la relazione tra il numero stesso e Enrico;
c) Dante è l'autore della *Divina Commedia* – "è l'autore di" esprime la relazione tra Dante e la *Divina Commedia*;
d) La retta r è parallela alla retta s – "è parallela a" esprime la relazione tra le rette r e s;
e) 5 è minore di 7 - "è minore di" esprime la relazione tra 5 e 7.

Spesso per schematizzare una relazione si usano diagrammi in cui gli elementi che sono in relazione sono collegati da frecce.

Esempio 9

Schematizzare le relazioni tra i seguenti insiemi:
M={Antonio, Giovanni, Salvatore}, N={Laura, Beatrice, Rosa} abbreviando i nomi con le iniziali, sia A fratello di B e di R, G fratello di L.

Soluzione

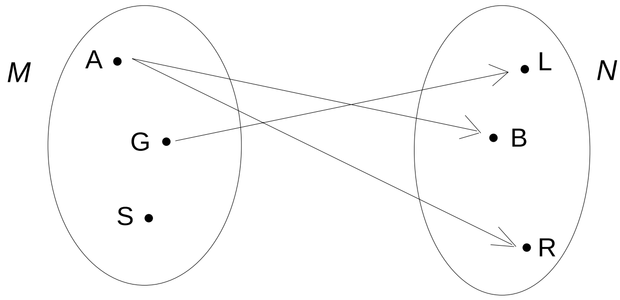


Figura 3

Esempio 10

Schematizzare le relazioni tra i seguenti insiemi:
T={1, 2, 4, 7}, *V*={3, 5, 8} con la relazione "minore di" tra gli elementi di *T* e quelli di *V*.

Soluzione

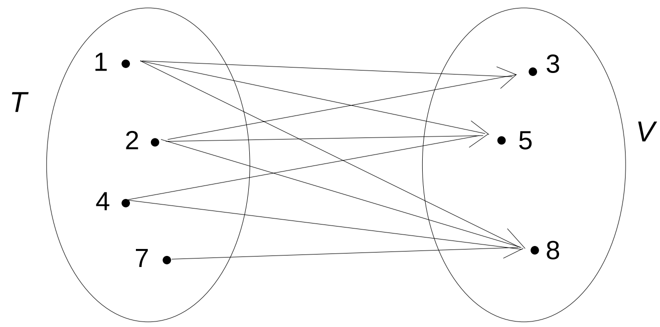


Figura 4

Osserviamo che le coppie ordinate possono essere ben utilizzate per descrivere relazioni: così, per gli esempi precedenti si hanno i seguenti insiemi:

$R_1 = \{(A, B), (A, R), (G, L)\}$;

$R_2 = \{(1, 3), (1, 5), (1, 8), (2, 3), (2, 5), (2, 8), (4, 5), (4, 8), (7, 8)\}$

Si nota facilmente che R_1 è un sottoinsieme di $M \times N$ e che R_2 è un sottoinsieme di $T \times V$.

Possiamo quindi formalizzare la seguente:

Definizione 2

Dati due insiemi A e B ogni sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$ dicesi ***relazione*** tra A e B.

Se A=B la relazione si dice ***binaria*** sull'insieme A.

Esempio 11

a) L'*uguaglianza* definita su N (Q, R o un qualsiasi insieme numerico) è una relazione binaria. E' sempre possibile, infatti, stabilire quali elementi dell'insieme sono uguali.

b) Sia S= {a, b, c, d, e, f, g}un insieme di persone. La relazione "è fratello di" su S é una relazione binaria.

c) Se T è l'insieme delle rette di un piano, la relazione "r è perpendicolare a s" con $r, s \in T$ è una relazione binaria su T.

1.5. Proprietà delle relazioni

Esercizio 5

Sia π il piano e R l'insieme delle rette di esso. La nozione di rette parallele definisce in R una relazione? Nel caso affermativo, indicata con P, può essere così formulata

$$P= \{(a, b) \in R\text{x}R | a/ /b\}?$$

In tale circostanza risulta:

i) $(a,a) \in P \quad \forall a \in \mathrm{R}$?

ii) $(a,b) \in P \Rightarrow (b,a) \in P \quad \forall (a,b) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$?

iii) $(a,b) \in P, (b,c) \in P \Rightarrow (a,c) \in P$?

iv) $(a,b) \in P, (b,a) \in P \Rightarrow a = b$?

Se hai svolto attentamente l'esercizio precedente ti sarai accorto che si possono formulare delle proprietà generali che possono essere soddisfatte o meno da una particolare relazione. Infatti nell'esercizio precedente la relazione che abbiamo definito e che possiamo chiamare di parallelismo nell'insieme delle rette del piano, soddisfa le proprietà *i)*, *ii)*, *iii)*, ma non la *iv)*.

Per rendere il discorso più generale, a ciascuna delle proprietà *i)*, *ii)*, *iii)*, *iv)*, dell'esercizio 5 si dà un nome particolare come di seguito specificato.

Data una relazione *R* qualsiasi su un insieme *A*, diremo che essa soddisfa le proprietà:

1. ***riflessiva*** se e solo se $(a,a) \in R \quad \forall a \in A$
2. ***simmetrica*** se e solo se $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad \forall a,b \in A$
3. ***transitiva*** se e solo se $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
   $\forall a,b,c \in A$
4. ***antisimmetrica*** se e solo se $(a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b \quad \forall a \in A$.

Esercizio 6

La relazione di parallelismo nell'insieme delle rette del piano quali proprietà soddisfa?

Esercizio 7

Se A è un insieme indichiamo con P(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A, cioè se B$\in$ P(A) significa che $B \subset A$. In P(A)$\times$P(A) definiamo l'insieme

$$\sigma = \{(X,Y) \in P(A) \times P(A) \mid X \subset Y\}.$$

È σ una relazione in P(A)? Quali proprietà soddisfa?

Esercizio 8

Sia *R* l'insieme delle rette del piano e $T = \{(a,b) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid a \perp b\}$ cioè se due rette *a e b* sono perpendicolari allora *(a,b)*$\in$ *T.* È T una relazione in *R*? Quali proprietà soddisfa?

1.6. Relazioni di equivalenza.

Negli esercizi del paragrafo precedente abbiamo constatato che non tutte le relazioni hanno le stesse proprietà, ne segue che esse possono essere suddivise in base alle proprietà che soddisfano.

Definizione 3

Sia R una relazione su un insieme A, diremo che essa è di equivalenza se e solo se soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Se $x, y \in A$ e $(x, y) \in R$, cioè x e y sono nella relazione R, diremo brevemente che y è *equivalente* a x o viceversa x è equivalente a y. Così, comunque si fissa $x \in$ A, possiamo considerare tutti gli elementi $y \in$ A che sono ad esso equivalenti; tali elementi costituiscono un insieme che chiamiamo ***classe di equivalenza*** e lo indichiamo con $[x]$.

L'insieme delle classi di equivalenza si chiama ***insieme quoziente*** e lo indichiamo con *Q/R,* cioè

$$Q/R=\{ [x], [y], [z], \ldots \}$$

Esercizio 9

Definisci in simboli l'insieme $[x]$.

Esercizio 10

La relazione di parallelismo nell'insieme delle rette del piano è una relazione di... Data una retta *a*, qual è la classe di equivalenza da essa determinata? Qual è l'insieme quoziente rispetto a questa relazione?

Esercizio 11

La relazione di perpendicolarità tra le rette del piano è una relazione di equivalenza? Giustifica la risposta.

Esercizio 12

Sia Q_a l'insieme dei numeri razionali assoluti. Consideriamo l'insieme

$$R = \left\{ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \in Q_a \times Q_a \mid ad = bc \right\}.$$

È R una relazione di equivalenza in Q_a? In caso affermativo determinare le classi di equivalenza. Esiste qualche connessione con il concetto di frazioni equivalenti?

Esercizio 13

Sia N l'insieme dei numeri naturali e N_0 l'insieme dei naturali privati dello zero. Nell'insieme $N \times N_0$ definiamo il sottoinsieme

$$V = \{((a,b),(c,d)) \in (N \times N_0) \times (N \times N_0) \mid ad = cb\}.$$

È una relazione di equivalenza in $N \times N_0$? Riconosci qualche analogia tra l'insieme dei razionali assoluti e l'insieme quoziente $(N \times N_0)/V$?

1.7. Relazioni d'ordine

Un'altra importante classe di relazioni è costituita da tutte quelle che soddisfano le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Infatti

Definizione 4

chiamiamo ***relazione d'ordine*** ogni relazione su un insieme che soddisfa le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esercizio 14

Sia A un insieme e P(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A; la relazione di inclusione in P(A) cioè l'insieme σ dell'esercizio 7 definisce una relazione d'ordine?

Esercizio 15

La relazione $\leq$ ($\geq$) nell'insieme N, Q_a, Z, Q, R è una relazione d'ordine? Giustifica la risposta in ciascun caso.

1.8. Funzioni

Esaminiamo i seguenti esempi di relazioni:

Esempio 12

Sia A il seguente insieme di ragazzi

{Paolo, Mario, Carlo, Piero, Laura}

e B l'insieme dei mesi dell'anno. Consideriamo la relazione tra gli insiemi A e B che ad ogni ragazzo associa il mese in cui è nato. Supponiamo che la situazione sia quella schematizzata in Fig. 5. Osserviamo che ad ogni ragazzo (elemento di A) corrisponde uno e un solo mese (elemento di B), quindi possiamo dire che questa particolare relazione tra gli insiemi A e B gode della seguente proprietà:

ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B.

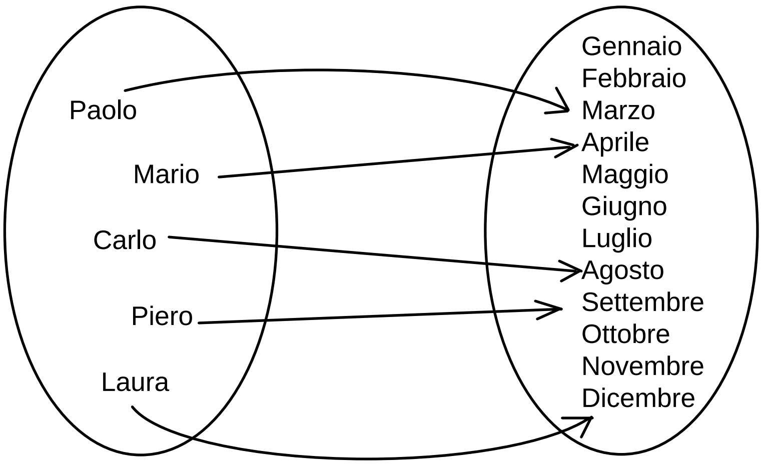


Figura 5

Esempio 13

Sia A il seguente insieme di ragazzi

A= {Maria, Mario, Anna}

e B l’insieme dei loro genitori: Antonio e Laura, Enzo e Rita

B= {A, L, E, R}.

Consideriamo la relazione tra A e B che ad ogni ragazzo associa i propri genitori e sia essa rappresentata in figura 6:

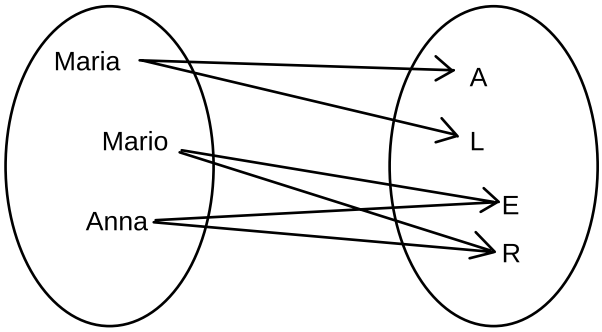


Figura 6

Osserviamo che questa relazione non gode della proprietà che “ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B”; infatti ad ogni ragazzo corrispondono entrambi i genitori, cioè ad un elemento di A corrispondono due elementi di B.

Abbiamo allora esaminato due situazioni diverse ed è molto importante distinguere quelle relazioni che godono della particolare condizione secondo la quale ad ogni elemento del primo insieme corrisponde *uno e un solo elemento del secondo*.

Infatti

Definizione 5

Dati due insiemi A e B, una relazione R tra A e B tale che per ogni elemento di A esiste uno e un solo elemento di B che è con esso nella relazione data, si chiama ***funzione*** da A in B.

Esercizio 16

Quale delle relazioni definite negli esempi 12 e 13 è una funzione?

Esercizio 17

Nell'esempio 13 sapresti modificare l'insieme B in modo che la relazione espressa diventi una funzione?

Per le funzioni si usa generalmente la seguente simbologia:

$$f : A \to B$$

ove con f (effe) si indica la funzione, A e B sono gli insiemi assegnati, in particolare A viene detto ***insieme di partenza*** o ***di definizione*** o ***dominio*** e B ***insieme di arrivo*** o ***dei valori*** o ***codominio***. Se $x \in$ A per indicare l'elemento di B corrispondente ad x nella funzione f si scrive

$x \to y = f(x)$ (si legge "effe di x") o $y = f(x)$

ove $y \in$ B è l'elemento corrispondente ad x.

L'elemento x appartenente all'insieme di definizione o dominio si chiama anche ***variabile indipendente***, mentre l'elemento $y = f(x)$ appartenente all'insieme dei valori o codominio si chiama anche ***variabile dipendente*** o ***immagine*** di x.

Con questa simbologia, in riferimento alla funzione definita nell'esempio 12 possiamo scrivere:

f (Paolo) = Marzo
f (Mario) = Aprile
f (Carlo) = Agosto
f (Piero) = Settembre
f (Laura) = Dicembre.

Spesso per indicare l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A (cioè il codominio di f) scriveremo f (A).

1.9. Funzioni iniettive, suriettive, biettive

Nel paragrafo precedente abbiamo definito funzione ogni relazione tra due insiemi A e B che gode della peculiarità secondo la quale per ogni elemento di A esiste uno e un solo elemento di B cui esso corrisponde nella relazione. Tuttavia le funzioni possono essere ulteriormente classificate.

Infatti:

Definizione 6

Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** se ad elementi distinti di **A** corrispondono elementi distinti di **B**.

In figura 7 e figura 8 sono schematizzate due funzioni rispettivamente iniettiva e non:

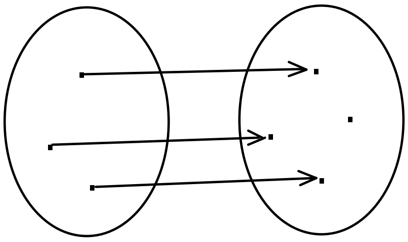


Figura 7 - Funzione iniettiva

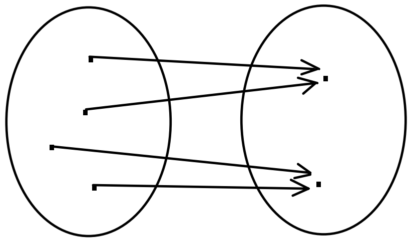


Figura 8 - Funzione non iniettiva

Esercizio 18

È iniettiva la funzione dell'esempio 12 del paragrafo precedente?

Definizione 7

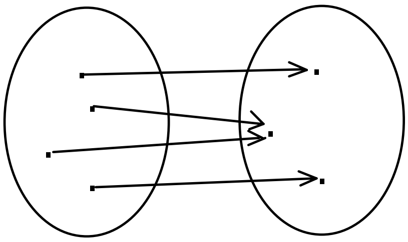
Una funzione $f : A \to B$ si dice ***suriettiva*** se il codominio di f coincide con B cioè

$$f(A) = B$$

Esercizio 19

Stabilire se è vera la seguente proposizione: se $f : A \to B$ è una funzione suriettiva allora $\forall y \in B \;\; \exists x \in A$ tale che $y = f(x)$.

Nelle figure 9 e 10 sono schematizzate due funzioni rispettivamente suriettiva e non:



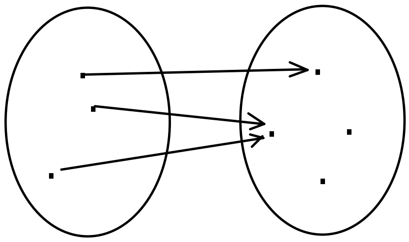


Figura 9 - Funzione suriettiva **Figura 10** - Funzione non suriettiva

Esercizio 20

La funzione schematizzata in figura 11 è iniettiva? è suriettiva? Sapresti enunciare a parole la corrispondenza definita dalla funzione?

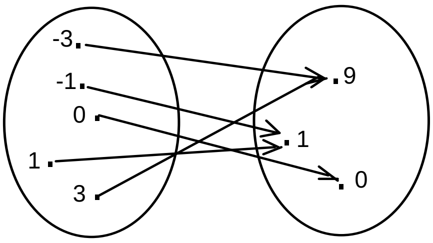


Figura 11 – Funzione $f : A \to B$**.**

Definizione 8

Una funzione si dice ***biettiva*** (o ***biumivoca***) se è sia iniettiva che suriettiva.

In figura 12 è schematizzata una funzione biettiva.

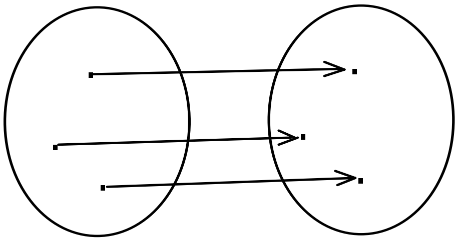


Figura 12 – Funzione biettiva

Esercizio 21

Sia A il seguente insieme di nazioni

{Francia, Spagna, Italia, Austria}

e B l'insieme delle rispettive capitali:

{Parigi, Madrid, Roma, Vienna}.

La funzione f che associa ad ogni nazione la rispettiva capitale è iniettiva? è suriettiva? è biettiva?

Esercizio 22

Sia N l'insieme dei numeri naturali e f la funzione

$$f : N \rightarrow N$$

che associa ad ogni numero il suo doppio. È iniettiva? è suriettiva? è biettiva?

1.10. Rappresentazione di funzioni: Tabelle a doppia entrata

Le funzioni oltre ad essere schematizzate con frecce come abbiamo fatto finora, possono essere rappresentate in modo più preciso con una tabella a doppia entrata. A tale scopo consideriamo l'esempio 12 del paragrafo 1.9.: la funzione può essere rappresentata con la tabella di figura 13. In essa nella prima colonna a sinistra sono indicati gli elementi di A, nella prima riga in alto sono indicati gli elementi di B, le caselle contrassegnate mostrano la corrispondenza funzionale tra A e B.

f	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Mario				X								
Carlo								X				
Paolo			X									
Piero									X			
Laura												X

Figura 13 – Tabella a doppia entrata

Esercizio 23

Costruisci la tabella a doppia entrata dell'esempio 13 del paragrafo 1.9.

1.11. Leggi di composizione interna

Consideriamo ora un altro tipo particolare di funzione che generalizza, in un certo senso, le operazioni sugli insiemi numerici che abbiamo visto nell'unità precedente. A tale scopo, dato un insieme A, possiamo certamente considerare una funzione che abbia come dominio l'insieme $A \times A$ e codominio lo stesso insieme A. Una tale funzione, in sostanza, ad ogni coppia ordinata (a, b) di elementi di A, cioè $(a, b) \in A \times A$, associa un solo elemento *c* ancora di A

$$(a, b) \in A \times A \rightarrow c \in A.$$

Esempio 14

Sia N l'insieme dei numeri naturali, ad ogni coppia di numeri naturali sia l'operazione di addizione che quella di moltiplicazione fanno corrispondere un ben determinato elemento di N.

$$(2,3) \in N \times N \rightarrow 2 + 3 = 5 \in N$$

$$(2,3) \in N \times N \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \in N$$

La stessa cosa si può dire per l'operazione di sottrazione?

Una funzione che ha come dominio $A \times A$ e codominio A prende il nome di ***Legge di composizione interna*** in A, e la denoteremo con la lettera greca τ (tau):

$$\tau : (a, b) \in A \times A \rightarrow \tau((a, b)) = c \in A;$$

molto spesso al posto di $\tau((a, b))$ scriveremo $a \tau b$.

Un insieme A munito di una legge di composizione interna prende il nome di ***struttura algebrica*** e si indica con (A, τ).

1.12. Proprietà delle leggi di composizione interna: Gruppo

Abbiamo definito le leggi di composizione interna come generalizzazioni delle operazioni sugli insiemi numerici, ma per questi nella prima unità abbiamo sottolineato alcune proprietà tra cui commutatività e associatività.

Vediamo ora come questi concetti si possono definire anche per le leggi di composizione interna e come in base ad esse si possono classificare le strutture algebriche. Per facilitare il compito ricordiamo ad esempio che l'addizione in Z gode delle seguenti proprietà:

1. commutativa: $a+b=b+a \qquad \forall a,b \in Z$
2. associativa: $(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \forall a,b,c \in Z$.

Allora se disponiamo della legge di composizione interna τ in A diremo che essa è:

a) ***commutativa*** se $a\tau b=b\tau a \ \ \forall a,b \in A$ cioè $\tau((a,b))=\tau((b,a))$;

b) ***associativa*** se $(a\tau b)\tau c=a\tau(b\tau c)$ cioè $\tau(\tau(a,b),c)=\tau(a,\tau(b,c))$.

Esercizio 24

L'addizione è una legge di composizione interna associativa e commutativa in N, Q, R?

Esercizio 25

La divisione in Q-$\{0\}$è una legge di composizione interna associativa?

Suggerimento. Osserva che $\left(\frac{3}{4}:\frac{3}{10}\right):\frac{5}{6}=\ldots \qquad \frac{3}{4}:\left(\frac{3}{10}:\frac{5}{6}\right)=\ldots$

Esercizio 26

La sottrazione è un'operazione associativa in Z?

Esercizio 27

L'unione e l'intersezione definite in P(A) sono leggi di composizione interna associative e commutative?

Proposizione

Se la struttura (A,τ) possiede un elemento neutro, questo è unico.

Dimostrazione.

Procediamo per assurdo: siano e ed e' due elementi neutri distinti. Allora

$$\text{se } e \text{ è neutro : } e\tau e' = e'\tau e = \ldots$$

$$\text{se } e' \text{ è neutro : } e\tau e' = e'\tau e = \ldots$$

da cui ….

Esercizio 28

Sia $P(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di A; provare che $\varnothing$ è neutro rispetto all'unione. Qual è l'elemento neutro rispetto all'intersezione?

Esercizio 29

La struttura algebrica $(Z,-)$ ha elemento neutro?

Infine abbiamo notato che per l'operazione di addizione in Z (N, Q, R) l'esistenza dell'opposto per ogni elemento, cioè

$$\forall a \in Z \exists (-a) \in Z \ : a + (-a) = 0$$

e in modo simile per la moltiplicazione in Q (o R) l'esistenza dell'inverso:

$$\forall a \in Q, a \neq 0 \ : \ a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Questa proprietà si può generalizzare per una struttura algebrica supponendo anzitutto che essa possegga l'elemento neutro. Infatti, se la struttura (A,τ) possiede l'elemento neutro e, diremo che l'elemento $a \in A$ possiede un *simmetrico* se esiste un elemento $\overline{a} \in A$ tale che

$$a\tau\overline{a} = \overline{a}\tau a = e$$

Osserviamo subito che in (Z, +) tutti gli elementi hanno il simmetrico (che abbiamo chiamato opposto), mentre in (Q, $\bullet$) hanno il simmetrico (che in tal caso è l'inverso) solo gli elementi diversi dallo zero.

Esercizio 30

In $P(A)$ esiste il simmetrico rispetto all'unione e all'intersezione?

Così come alcune proprietà delle relazioni ci hanno consentito di classificarle in relazioni di equivalenza e di ordine, le proprietà delle leggi di composizione ci consentono di classificare determinate strutture algebriche.

Infatti

Definizione 9

Chiamiamo ***gruppo*** una struttura algebrica (G, τ) tale che

1. è associativa;
2. esiste l'elemento neutro per τ ;
3. ogni elemento di G è dotato di simmetrico rispetto a τ .

Esercizio 31

Le strutture (Z, +), (Q, +), (R, +) sono gruppi?

Esercizio 32

La struttura (Q, $\bullet$) è un gruppo?

Esercizio 33

Le strutture (Z, $\bullet$), (N, +) sono gruppi?

Suggerimento. Verificare l'esistenza del simmetrico per ogni elemento …

Esercizio 34

La struttura (P(A), $\cup$) è un gruppo?
Suggerimento. Verificare la simmetrizzabilità…

Esercizio 35

Sia A l'insieme $\{0,1\}$ e τ la legge di composizione interna definita da:

τ	0	1
0	0	1
1	1	0

La struttura (A,τ) è un gruppo?

Esercizio 36

Perché è importante il carattere di struttura algebrica e la relativa classificazione?

Suggerimento. Prescinde dalla natura degli… e dal tipo di regola che definisce la particolare…; sono solo importanti le proprietà formali…

1.13. Due teoremi di teoria dei gruppi

Vogliamo ora dimostrare due semplici teoremi di teoria dei gruppi.

Teorema 1

In un gruppo (G,τ) valgono le seguenti leggi di cancellazione (o semplificazione):

i) cancellazione a sinistra

$$a,b \in G\ (x\tau a = x\tau b \forall x \in G) \quad \Rightarrow \quad a = b$$

ii) cancellazione a destra

$$a,b \in G\ (a\tau x = b\tau x \forall x \in G) \quad \Rightarrow \quad a = b$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la *i)*, ossia la legge di cancellazione a sinistra: sia (G,τ) un gruppo, e $x,a,b \in G$ tali che $x\tau a = x\tau b$. Essendo G un gruppo, esiste $\bar{x} \in G$ tale che

$$\bar{x}\tau x = e$$

ove e è l'elemento neutro. Allora risulta anche

$$\overline{x}\,\tau(x\tau a)=\overline{x}\,\tau(x\tau b),$$

o anche, applicando la proprietà associativa

$$(\overline{x}\,\tau x)\tau a=(\overline{x}\,\tau x)\tau b \quad\Rightarrow\quad e\tau a=e\tau b \quad\Rightarrow\quad a=b\,.$$

In modo analogo si dimostra la cancellazione a destra.

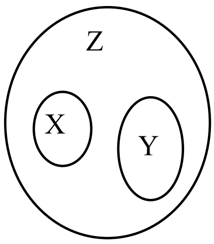
Esercizio 28

Perché nel teorema 1 è necessario definire sia la cancellazione a sinistra che a destra?

Potrebbe sorgere il dubbio che le proprietà di cancellazione siano valide sempre, anche se la struttura non è un gruppo. Il seguente esempio chiarisce la questione. La struttura algebrica (P(A), $\cup$), cioè l'insieme dei sottoinsiemi di A con l'operazione di unione, non è un gruppo e infatti in esso non vale la proprietà di cancellazione:

$$X,Y,Z\in P(A) \qquad Z\cup X=Z\cup Y \quad\not\Rightarrow\quad X=Y,$$

basta osservare la Fig. 14:



$Z\cup X=Z\cup Y$ ma $X\neq Y$.

Figura 14 - X, Y sottoinsiemi di Z .

Teorema 2

In un gruppo (G , τ) il simmetrico è unico.

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \in G$ e supponiamo per assurdo che x' e x'' siano due simmetrici distinti di x, allora per definizione, poiché x' è simmetrico di x si ha

$$x \tau x' = e$$

e poiché x'' è simmetrico di x si ha

$$x \tau x'' = e \quad \text{dunque} \quad x \tau x' = x \tau x''$$

e dalla legge di cancellazione a sinistra $x' = x''$, contro l'ipotesi. In un gruppo, quindi, ogni elemento è dotato di un unico simmetrico.

2. Esercizi

1.1. Insiemi e loro elementi

Scrivere:

Esercizio 29

L'insieme costituito dai primi quattro numeri naturali.

Esercizio 30

L'insieme costituito da x, y, z, t.

Esercizio 31

L'insieme delle automobili Fiat.

Esercizio 32

L'insieme degli alunni dell'istituto.

Esercizio 33

a è un elemento dell'insieme B, b è un elemento di A.

Esercizio 34

Un insieme di tre elementi.

Esercizio 35

Un insieme infinito.

Esercizio 36

Un insieme finito.

Completare con i simboli $\in$ o $\notin$, in modo che l'enunciato risulti vero:

Esercizio 37

$3....\{2,4,6\}; \quad 1....\{1,2,\}; \quad 3....\{3\}.$

Esercizio 38

$\{1\}....\{1,2\}; \quad 6....\{\ \}; \quad Maria....\{Giovanni, Rita\}.$

Esercizio 39

$5....\{6,5,8\}; \quad 8....\{6,5,8,10\}.$

Esercizio 40

Automobile targata CS $\ldots\{$x| x è un'automobile targata Roma$\}$.

Esercizio 41

Negli esercizi precedenti in cui hai collocato $\notin$, cambia l'insieme in modo da inserire il simbolo $\in$.

Esercizio 42

Negli esercizi precedenti in cui hai collocato $\in$, cambia l'insieme in modo da inserire il simbolo $\notin$.

Esercizio 43

Scrivere l'insieme dei numeri pari minori di dieci.

Esercizio 44

Scrivere l'insieme dei numeri dispari maggiori di cinque e minori di quindici.

Esercizio 45

Scrivere dieci insiemi descritti da proprietà.

Rispondere alle seguenti domande:

Esercizio 46

Indicare almeno due sinonimi della parola *insieme*.

Esercizio 47

Quando si può ritenere assegnato un insieme?

Esercizio 48

Specificare il significato dei seguenti simboli:

$$\{\ \};\quad \subseteq;\quad \supseteq;\quad \in;\quad \notin;\quad \varnothing.$$

1.2. Sottoinsiemi . Insieme vuoto

Completare col simbolo $\subseteq$ o $\not\subset$ in modo che l'enunciato risulti vero:

Esercizio 49

$\{4,6\}....\{4,6,7\};\quad \{1\}....\{1,2\};\quad \{2,3,5\}....\{2,6\};\quad \{4,6\}....\{4\}$.

Esercizio 50

$\{0\}....\{1\};\quad \{0\}....\{1,0\};\quad \{x,y\}....\{x,y,z\};\quad \{4\}....\{2^2,6,7,10\}$.

Esercizio 51

$\{Gioved\grave{i}\}....\{Marted\grave{i}, Mercoled\grave{i}\};\quad \{Gennaio\}....\{x /\ x\,\grave{e}\,un\,mese\,dell'anno\}$.

Esercizio 52

$\{a,b,c\}....\{a,b,d\};\quad \{m,n\}....\{\{m\},m,n\}$.

Esercizio 53

$\{Venerd\grave{i}\}....\{x /\ x\,\grave{e}\,un\,giorno\,della\,settimana\}$.

Esercizio 54

$\{7,8\}....\{7,16\};\quad \{8\}....\{2,4,6,2\times 4\}$.

Esercizio 55

Nei casi degli esercizi precedenti in cui hai usato il simbolo $\not\subset$, modificare l’insieme al secondo membro in modo da utilizzare il simbolo $\subseteq$.

Esercizio 56

Nei casi degli esercizi precedenti in cui hai usato il simbolo $\subseteq$, modificare l'insieme al secondo membro in modo da utilizzare il simbolo $\not\subset$.

Esercizio 57

Tenuto conto che: se $A = \varnothing$, A ha un solo sottoinsieme, se stesso; se $A = \{a\}$, A ha due sottoinsiemi: $\varnothing$ e A;
se $C = \{a, b\}$, allora C ha quattro sottoinsiemi: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
determinare tutti i sottoinsiemi di $D = \{a, b, c\}$; $E = \{a, b, c, d\}$.

Esercizio 58

Quali dei seguenti insiemi sono uguali?
$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{x, y, z\}$; $C = \{c, d, a, b\}$; $D = \{0\}$;
$E = \{x /\ x \text{ è } una\ delle\ prime\ quattro\ lettere\ dell'alfabeto\}$;
$F = \{x /\ x = 0\}$.

Esercizio 59

Quale relazione esiste tra A e C se $A \subseteq C$ e $C \subseteq A$?

Esercizio 60

Tra quali dei seguenti insiemi esiste la relazione di $\subset$ o di $=$?
$A = \{1,2,3\}$;
$B = \{x /\ x \text{ è } uno\ dei\ primi\ tre\ numeri\ naturali\}$;
$C = \{x /\ x \text{ è } un\ numero\ naturale\}$;
$D = \{\varnothing\}$.

Dire quali dei seguenti enunciati è vero o falso giustificando la risposta:

Esercizio 61

Se $A \subseteq B$ allora $A = B$.

Esercizio 62

$\{\ \} = \varnothing$.

Esercizio 63

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$.

Esercizio 64

Se $A \subseteq B$ allora $A \subset B$.

Esercizio 65

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$.

1.3. Unione e intersezione di insiemi

Trovare l'insieme unione ed intersezione delle seguenti coppie:

Esercizio 75

$A = \{Carlo, Giancarlo, Lucia\}$,

$B = \{Maria, Giancarlo, Francesco, Marco\}$.

Esercizio 76

$X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,5,6,4\}$.

Esercizio 77

$C = \{1,2\}$, $D = \varnothing$.

Esercizio 78

$E = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4,5\}$.

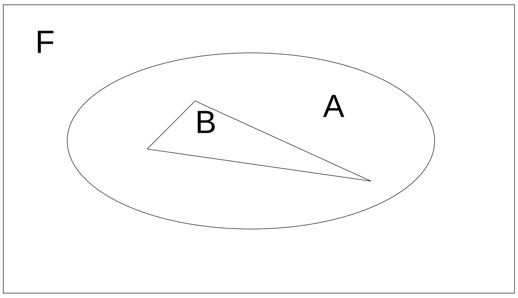
Esercizio 79

E’ dato un insieme di 28 ragazze di cui 20 hanno occhi chiari; 16 hanno capelli biondi; 12 hanno occhi chiari e capelli biondi.
Quante ragazze hanno occhi chiari ma non capelli biondi?
Quante ragazze hanno capelli biondi ma non occhi chiari?
Quante ragazze non hanno né capelli biondi, né occhi chiari?

Esercizio 80

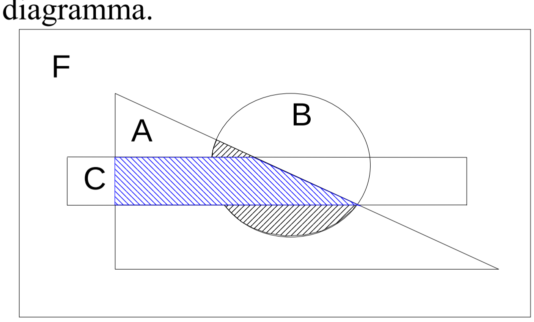
Tratteggiare la porzione del diagramma che rappresenta

$A \cup B$ *e* $A \cap B$



Esercizio 81

Usando la notazione insiemistica, descrivere la porzione di piano tratteggiata nel diagramma.



Dire quale delle seguenti proposizioni è vera o falsa, giustificando la risposta.

Esercizio 82

Sia A l'insieme dei numeri razionali compresi fra 2 e 6, B l'insieme dei numeri razionali compresi fra 4 e 8. Trovare l'insieme unione e l'insieme intersezione.

Esercizio 83

Sia $U = \left\{ -6,5,6,\frac{20}{5},-32,-8,0,7.\bar{1},-0.\overline{6},24,-2,0,6,\overline{12},-\frac{48}{2} \right\}$.

Sia A il sottoinsieme dei numeri relativi positivi di U.
Sia B il sottoinsieme dei numeri relativi positivi pari di U.
Sia C il sottoinsieme dei numeri relativi negativi di U.
Trovare $A \cup B,\ A \cup C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ B \cup C.$

Esercizio 84

Per ogni insieme $A : A \cup \varnothing = A$.

Esercizio 85

Per ogni insieme $A : A \cup A = A$.

Esercizio 86

Per ogni insieme A *e* $B : A \cap B = B \cap A$.

Esercizio 87

Per ogni insieme $A,\ B,\ C : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Esercizio 88

Se $a \in A \cap B$ allora $a \in A \cup B$.

Esercizio 89

Se $a \in A \cup B$ allora $a \in A \cap B$.

Tracciare un diagramma di Venn tale che gli insiemi A, B, C soddisfino a ciascuna delle seguenti condizioni.

Esercizio 90

$A \cap B \neq \varnothing$; $\quad C \subset (A \cap B)$.

Esercizio 91

$A \cap C \neq \varnothing$; $\quad B \cap C \neq \varnothing$; $\quad A \cap B = \varnothing$.

Esercizio 92

$A \subset B$; $\quad C \cap B \neq \varnothing$; $\quad A \cap B = \varnothing$.

1.4. Prodotto cartesiano

Esercizio 93

Date le coppie ordinate $(2x, 2y)$ e $(4,6)$ determinare x e y in modo che le coppie siano uguali.

Esercizio 94

Date le coppie ordinate $(x+1, y-1)$ e $(5,8)$ determinare x e y in modo che le coppie siano uguali.

Esercizio 95

E' corretto scrivere $(x, y) = (y, x)$? E $\{x, y\} = \{y, x\}$?

Esercizio 96

Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, costruire l'insieme $A \times A$.

Esercizio 97

Dati gli insiemi $A = \{5,6\}$ e $B = \{3,4,5\}$, costruire gli insiemi $A \times A,\ A \times B,\ B \times A,\ B \times B$.

Esercizio 98

Dati gli insiemi $A = \{0,1,5\}$ e $B = \{3,4\}$, costruire gli insiemi $A \times A,\ A \times B,\ B \times A,\ B \times B$.

Esercizio 99

Dati gli insiemi $A = \{a,\ b,\ c\}$ e $B = \{s,\ t\}$, verificare che $A \times B \neq B \times A$.

Esercizio 100

Se $A \times B = \varnothing$, è possibile affermare che $A = \varnothing$? Perché?

Esercizio 101

Dato l'insieme $A \times B = \{(3,2);(5,4);(3,6);(5,2);(5,6);(3,4)\}$, individuare gli elementi di A e quelli di B.

1.5. Relazioni

Esercizio 102

Dire qual è l'espressione che specifica la relazione tra X e Y in ciascuno dei seguenti casi:

1. X è il padre di Y;
2. X è la città in cui vive Y;
3. X è uguale ad Y;

4. X è maggiore di Y.

Esercizio 103

Siano $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ e

$$R = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B \wedge b = 2a\}$$

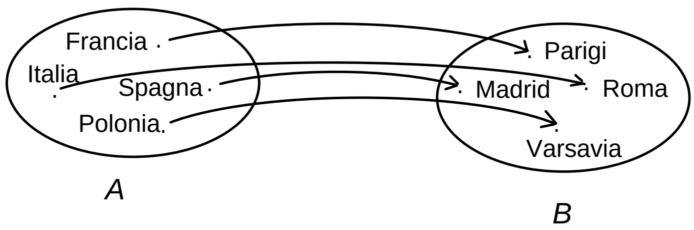
tre insiemi. Determinare gli elementi di R.

Esercizio 104

Schematizzare gli insiemi $A = \{2,8,10\}$ e $B = \{1,3,9\}$ con la relazione “essere maggiori di” tra gli elementi di A e quelli di B.

Esercizio 105

Siano A e B gli insiemi schematizzati in figura:



individuare la relazione tra i due insiemi e gli elementi dell’insieme $A \times B$ da essa determinato.

Esercizio 106

Dati gli insiemi $A = \{5,\ 6,\ 7\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, scrivere tutti gli elementi (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a + b$ è un numero pari.

Esercizio 107

Dati gli insiemi $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$ e $B = \{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$, scrivere tutti gli elementi (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a + b = 8$.

Esercizio 108

Dati gli insiemi $A=\{2, 4, 6, 8\}$ e $B=\{1, 2, 3, 4\}$ scrivere tutti gli elementi (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a=2b$.

Esercizio 109

Dati gli insiemi $A=\{18, 25, 10\}$ e $B=\{2, 3, 5, 6\}$, scrivere tutti gli elementi (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$ individuati dalla relazione "essere multipli di".

Esercizio 110

Sia $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ un insieme di persone. Dire se la relazione "essere nato nello stesso anno di" è una relazione binaria.

1.6. Proprietà delle relazioni

Esercizio 111

Siano $A=\{6, 8, 12, 15, 20\}$ e $B=\{2, 4, 5\}$ due insiemi con la relazione "essere multiplo di" tra gli elementi di A e quelli di B. Dopo aver costruito il sottoinsieme di $A \times B$ caratterizzato da tale relazione, individuare le proprietà di quest'ultimo.

Esercizio 112

Nell'insieme delle matite colorate la relazione "avere lo stesso colore di" gode della proprietà simmetrica?

Esercizio 113

Nell'insieme degli alunni che compongono una classe la relazione "avere lo stesso nome di" quali proprietà soddisfa?

Esercizio 114

Stabilire di quali proprietà godono le seguenti relazioni:

- essere divisore di;
- essere maggiore di.

Esercizio 115

Stabilire di quali proprietà godono le seguenti relazioni:

- essere coetaneo di;
- essere più alto di;
- essere più giovane di.

Esercizio 116

Sia $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ un insieme di persone. Dire di quali proprietà godono le seguenti relazioni:

- essere alunni di
- essere concittadino di
- essere alto come
- essere madre di
- essere cugino di
- essere compagno di

Esercizio 117

Siano $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $R = \{(x,\ y) \mid x + y \text{ è } pari\}$ due insiemi. R è una relazione? Quali proprietà soddisfa?

1.7. Relazioni di equivalenza

Esercizio 118

L'insieme $R = \{(a,b) \mid a + b = k,\ k \in N\}$ è una relazione di equivalenza in $N \times N$?

Esercizio 119

Nell'insieme dei poligoni la relazione "avere lo stesso numero di lati" è di equivalenza?

Esercizio 120

Nell'insieme dei segmenti la relazione "avere la stessa lunghezza" è una relazione di equivalenza? Giustificare la risposta.

Esercizio 121

Nell'insieme G dei rettangoli la relazione "avere lo stesso perimetro" è una relazione di equivalenza? In caso affermativo, è possibile ripartire G in classi di equivalenza rispetto a tale relazione?

Esercizio 122

Sia $A = \{$Roma, Madrid, Napoli, Barcellona, Parigi, Venezia$\}$con la relazione "essere dello stesso stato". Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza.

Esercizio 123

Sia $A = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{4}, \frac{10}{12}\right\}$. La relazione "avere lo stesso valore" è di equivalenza? In caso affermativo determinare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

Esercizio 124

Sia $A = \{$Sedia, Tavolo, Scarpa, Poltrona, Tovaglia, Sigaretta$\}$un insieme di nomi di oggetti, con la relazione "iniziare con la stessa lettera". Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

Esercizio 125

Nell'insieme dei numeri naturali la relazione "essere primo con" è di equivalenza? Giustificare la risposta.

Esercizio 126

Sia $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$un insieme di persone: $a,\ e,\ f$ abitano a Londra; $b, d,\ h$ abitano a Dublino; $c,\ g$ abitano a Oslo. Nell'insieme A la relazione" abitare nella stessa città" è di equivalenza? In caso affermativo determinare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

Esercizio 127

Sia $A=\{16,\ 61,\ 25,\ 123,\ 321,\ 52,\ 17,\ 213\}$un insieme di numeri naturali. Dopo aver provato che la relazione "essere formato dalle stesse cifre" è una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza.

Esercizio 128

Verificare che le frazioni 8/20 e 14/35 appartengono alla stessa classe di equivalenza.

Esercizio 129

Determinare il valore di $a \in N$ e di $b \in N$ per i quali $\frac{8a}{117}$ e $\frac{4b}{45}$ appartengono alla stessa classe di equivalenza $\left[\frac{16}{9}\right]$.

1.8. Relazione d'ordine

Esercizio 130

Sia A un insieme di studenti. La relazione "essere più alto di" è una relazione d'ordine?

Sia A un insieme e r una relazione in A. Determinare, in ciascuno dei seguenti casi, quali proprietà soddisfa r, se si tratta di relazione di equivalenza, d'ordine o né di equivalenza né d'ordine. Nel primo caso costruire l'insieme quoziente:

Esercizio 131

$A = \{\text{militari di una caserma}\}$; r :"essere un superiore di".

Esercizio 132

$A = \{\text{militari di una caserma}\}$; r : "essere superiore o pari grado di".

Esercizio 133

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$; r : "dividere esattamente".

Esercizio 134

$A = \{2,\ 8,\ 16,\ 64\}$; r : "dividere esattamente".

Esercizio 135

$A = \{\text{giocatori che disputano la finale di un torneo di calcio}\}$; r : "appartenere alla stessa squadra".

Esercizio 136

$A = \{\text{giocatori che disputano la finale di un torneo di calcio}\}$; r : "avere segnato lo stesso numero di gol".

1.9. Funzioni

Esercizio 137

Siano $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$. La relazione $\{(a, 1),\ (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ è una funzione?

Esercizio 138

Siano $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$. Dire quali delle seguenti relazioni tra A e B sono funzioni:

- $\{(1,3),\ (2,3),\ (5,4)\}$
- $\{(2,5),\ (3,5),\ (5,7),\ (1,7),\ (4,6)\}$
- $\{(2,8),\ (3,5),\ (5,7),\ (1,3),\ (4,5)\}$
- $\{(1,7),\ (2,6),\ (3,5)\ (4,4),\ (5,3)\}$

Esercizio 139

Nell'insieme dei numeri naturali **N** la relazione "essere triplo di" è una funzione?

Esercizio 140

Siano $A = \{\text{Roma, Madrid, Parigi}\}$ e $B = \{\text{Italia, Spagna, Francia}\}$ due insiemi. La relazione "essere capitale di" è una funzione?

Esercizio 141

Siano $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\}$ due insiemi. La relazione "essere il quadrato di" è una funzione?

Individuare 10 coppie ordinate, determinate dalle seguenti funzioni, convenendo di indicare nella prima coordinata la variabile indipendente e nella seconda la variabile dipendente (valore della funzione).

Esercizio 142

$$y = 3x^2 - 1;\ \ y = \frac{7x^4 + 1}{2x};\ \ y = x^3 - 3x + 1;\ \ y = \frac{7x - 2}{5x^2 + 1}.$$

Suggerimento: per la prima funzione si ha $\left\{(0,-1),(1,2),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right),\ldots\right\}$.

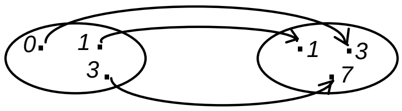
Esercizio 143

$$y = 6x^2 - 3x + 1; \;\; y = \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1}; \;\; y = \frac{8x^5 + 2}{4x}; \;\; y = \sqrt{5}x^2 - 2 .$$

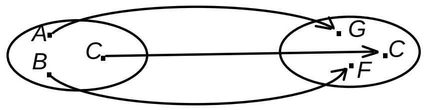
Esercizio 144

Quali delle relazioni schematizzate dalle seguenti figure sono funzioni? Giustificare la risposta.

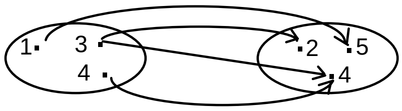
a)



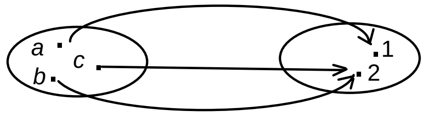
b)



c)



d)



Quali delle seguenti relazioni sono funzioni? Giustificare la risposta e indicare l'insieme di partenza e di arrivo.

Esercizio 145

$\{(1,2),\; (2,5),\; (3,7),\; (1,5),\; (3,8)\}$

Esercizio 146

$\{(5,4),\; (6,5),\; (7,6),\; (8,7)\}$

Esercizio 147

$\{(7,1),\; (5,1),\; (4,1),\; (3,1),\; (1,1)\}$

Esercizio 148

$\{(a,1),\ (b,2),\ (c,3),\ (d,4),\ (g,2)\}$

Esercizio 149

$\{(4,3),\ (5,1),\ (7,4),\ (3,3),\ (1,1)\}$

Assegnati gli insiemi A e R come sotto specificati, dire in quale caso R può considerarsi una funzione di A in $B \subset Z$. Giustificare la risposta.

Esercizio 150

$A = \{a,\ b,\ c\}$ $\qquad$ $R = \{(a,\ 0),\ (b,\ 1),\ (c,\ 1/2)\}$

Esercizio 151

$A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ $\qquad$ $R = \{(a,\ -1),\ (b,\ -2),\ (c,\ -3),\ (d,\ -4)\}$

Esercizio 152

$A = \{x \mid x \in N, x \leq 3\}$ $\qquad$ $R = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,4)\}$

Esercizio 153

$A = \{0\}$ $\qquad$ $R = \{(0,0),\ (0,1),\ (0,3)\}$

Esercizio 154

$A = \{x \mid x \in Z,\ |\,x\,| \langle 2\}$ $\qquad$ $R = \{(-1,0),\ (0,0),\ (1,2)\}$

Esercizio 155

$A = \{x \mid x \in N,\ 5 \leq x \langle 3\}$ $\qquad$ $R = \{(5,4),\ (6,7),\ (7,4)\}$

Esercizio 156

Nei casi degli esercizi precedenti in cui si è data risposta negativa, correggere l'insieme R in modo che possa essere identificato con una funzione di A in $B \subset Z$.

Esercizio 157

Sia A l'insieme degli alunni della classe. Enunciare:

- tre funzioni definite in A;
- tre relazioni in A che non siano funzioni.

Esercizio 158

Ricordando che N, Q, I, R, indicano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, razionali, irrazionali, reali, stabilire:

- una funzione di N $\to$ Q;
- una funzione di Q $\to$ I;
- una relazione di N $\to$ R che non sia una funzione.

Esercizio 159

Siano $A = \{2,\ 5,\ 7,\ 10\}$ e $B = \{16,\ 35,\ 51,\ 75\}$ due insiemi. La relazione "essere divisore di" è una funzione?

Esercizio 160

Siano $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$ e $B = \{4,\ 6,\ 10,\ 12\}$ due insiemi. La relazione "essere il doppio di" è una funzione? In caso affermativo determinare l'immagine di ogni $a \in A$ in B e il codominio della funzione $f : A \to B$.

Esercizio 161

Sia dato l'insieme $A = \{2,\ 5,\ 7,\ 10\}$ e la funzione $f : A \to B$ tale che $f(x) = 3x - 1,\ x \in A$. Determinare il codominio di f .

Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni:

Esercizio 162

$A = \{(a, b), (b. c), (c, d)\}$

Esercizio 163

$B = \{(3,0), (2,0), (1,0)\}$

Esercizio 164

$C = \{(1,3), (2,0), (5,7)\}$

Determinare il codominio B **delle funzioni** $f : A \to B$ **in ciascuno dei seguenti casi:**

Esercizio 165

$A = \{0, 2, 3, 7\}$ $\qquad f(x) = 3x$

Esercizio 166

$A = \{x \in N : x\langle 10\}$ $\qquad f(x) = x + 1$

Esercizio 167

$A = \{x \in N : -2\langle x \le 6\}$ $\qquad f(x) = x^2$.

Esercizio 168

Data la funzione $f : x \to x + 1,\ x \in N$, quali sono il suo dominio e il suo codominio? Calcolare $f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3)$.

Esercizio 169

Siano A e $B=\{0,\ 6,\ 10,\ 14\}$ due insiemi e $f:A\to B$ così definita: $f(x)=2x-4$. Di quale elemento di A ciascuno elemento di B è immagine?

1.10. Funzioni iniettive – suriettive – biettive

Esercizio 170

La funzione $f:N\to N$ definita dalla legge $f(n)=5n$ è iniettiva? Perché?

Esercizio 171

Siano $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B=\{1,\ 2,\ 3,4,\ 5\}$ due insiemi e $f:A\to B$ una relazione tale che $f(a)=a+1$. Dopo aver provato che f è una funzione, determinare $f(A)$ e dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 172

La funzione che ad ogni numero relativo associa il suo quadrato è una funzione iniettiva? E' suriettiva? Giustificare le risposte.

Esercizio 173

La funzione $f:N\to Z$ definita dalla legge $f(n)=n-4$ è biettiva?

Esercizio 174

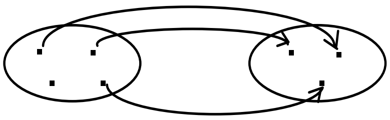
Dati gli insiemi $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ e $B=\{r,\ s,\ t\}$, dimostrare che la relazione f tale che $f(a)=f(b)=r;\ f(c)=s;\ f(d)=f(e)=t$ è suriettiva.

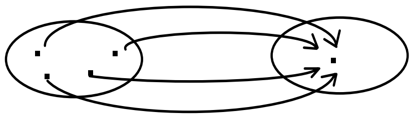
Esercizio 175

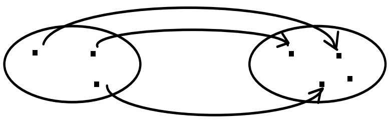
Siano S l'insieme dei segmenti di un piano π e P l'insieme dei punti del piano π. Dimostrare che la funzione $f : S \to P$ "avere lo stesso punto medio" è suriettiva.

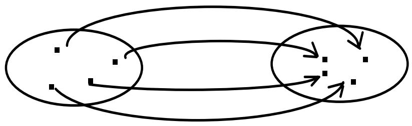
Esercizio 176

Tra le funzioni rappresentate nella figura seguente individuare quelle iniettive, quelle suriettive, quelle biettive:

a)


b)


c)


d)


Esercizio 177

Dire, giustificando la risposta, quali delle funzioni degli esercizi 132 e 136 del paragrafo precedente sono biettive.

Quale delle seguenti corrispondenze tra gli insiemi A e B è biunivoca? Giustificare la risposta.

Esercizio 178

A: insieme dei cavalli che partecipano ad una corsa;
B: insieme dei fantini che gareggiano nella stessa corsa;
corrispondenza: "$x \in A$ è cavalcato da $y \in B$".

Esercizio 179

A: insieme dei calciatori tesserati da squadre di serie "A";
B: insieme delle squadre di serie "A";
corrispondenza: "$x \in A$ gioca in $y \in B$".

Esercizio 180

A: insieme dei numeri naturali;
B: insieme dei numeri pari;
corrispondenza: "a $x \in A$ corrisponde $2x \in B$".

Esercizio 181

A: insieme dei numeri naturali;
B: insieme dei numeri dispari;
corrispondenza: "a $x \in A$ corrisponde $2x+1 \in B$".

Esercizio 182

A: insieme di 100 automobili;
B: insieme delle provincie in cui sono state immatricolate;
corrispondenza: "a $x \in A$ corrisponde la sigla della targa $y \in B$".

Classificare le seguenti funzioni $f : N \to N$:

Esercizio 183

$f(n) = n^2$

Esercizio 184

$f(n) = n^3$

Esercizio 185

$f(n) = 3n$

Classificare le seguenti funzioni $f : Z \to Z$:

Esercizio 186

$$f(x) = x - 9$$

Esercizio 187

$$f(x) = |x|$$

Esercizio 188

$$f(x) = x + 2^2$$

Classificare le seguenti funzioni $f : Q \to Q$:

Esercizio 189

$$f(x) = 5x$$

Esercizio 190

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3}$$

Esercizio 191

$$f(x) = \frac{x^2}{9}$$

Classificare le seguenti funzioni $f : R \to R$:

Esercizio 192

$$f(x) = 4x + 10$$

Esercizio 193

$$f(x) = 1 - x^2$$

Esercizio 194

$f(x) = 5$

Esercizio 195

$f(x) = x^2 + 2$

Esercizio 196

$f(x) = x^4$

Classificare le seguenti funzioni:

Esercizio 197

$f : Z \to R \quad f(x) = x$

Esercizio 198

$f : N \to Q \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Esercizio 199

$f : A \to A \quad f(x) = 3 - x$ con $A = \{1,2,3\}$

Esercizio 200

$f : A \to B \quad f(x) = x^2$ con $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{0,1,4\}$

Esercizio 201

$f : A \to B \quad f(x) = x^2$ con $A = \{-3,-1,0,1,3\}$ e $B = \{0,1,9\}$

1.11. Rappresentazione di funzioni: Tabelle a doppia entrata

Esercizio 202

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 137.

Esercizio 203

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 140.

Esercizio 204

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 143.

Esercizio 205

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 145.

Esercizio 206

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 146.

Esercizio 207

Costruire la tabella a doppia entrata dell'esercizio n. 147.

1.12. Leggi di composizione interna

Esercizio 208

Sia U un insieme. Considerare la funzione che ad ogni coppia di sottoinsiemi A e B di U associa l'insieme $A \cup B$ (oppure $A \cap B$). E' tale funzione una legge di composizione interna (operazione) in U? Giustificare la risposta.

Esercizio 209

Sia Z l'insieme degli interi relativi e $f: Z \times Z \to Z$ la funzione tale che

$$(x, y) \in Z \times Z \to f(x, y) = x - y.$$

E' f una legge di composizione interna in Z? Giustificare la risposta.

Esercizio 210

Rifare l'esercizio precedente sostituendo N a Z.

Esercizio 211

Sia Q_0 l'insieme dei numeri razionali privati dello zero e $g: Q_0 \times Q_0$ la funzione tale che

$$(x, y) \in Q_0 \times Q_0 \to g(x, y) = \frac{x}{y}.$$

E' g una legge di composizione interna in Q_0? Giustificare la risposta.

Definire una legge di composizione interna nei seguenti insiemi:

Esercizio 212

Insieme dei numeri pari.

Esercizio 213

Insieme dei numeri dispari.

Esercizio 214

Insieme dei numeri naturali non primi.

Esercizio 215

$\{x | x = n^2, n \in N\}$

Esercizio 216

Insieme dei numeri interi multipli di tre.

Esercizio 217

Insieme dei numeri irrazionali.

Esercizio 218

Insieme dei numeri reali

Esercizio 219

Quale delle operazioni usuali (addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione) definisce in $A = \{-1, 0, 1\}$ una legge di composizione interna? Giustificare la risposta. $[moltiplicazione]$

Esercizio 220

Nell'insieme $B = \{2, 1, 1/2\}$ l'ordinaria divisione è interna?

Esercizio 221

L'operazione di elevamento a potenza è interna all'insieme

4. dei naturali?
5. dei naturali meno lo zero?
6. degli interi meno lo zero?

Esercizio 222

Quali fra le coppie $(Q,+)$, $(R,-)$, $(R,\bullet)$, $(R,+)$ sono strutture?

1.13. Proprietà delle leggi di composizione interna

Esercizio 223

Nell'insieme R sono definite le operazioni

- $x * y = x + 2y$
- $x * y = \dfrac{x + y}{2}$
- $x * y = \dfrac{2}{x + y}$

quali fra queste operazioni sono commutative, quali associative?

Esercizio 224

Quali delle seguenti operazioni definite in R sono commutative?

1. $x * y = x + y + 5$
2. $x * y = x - y + 5$
3. $x * y = x^2 + y + 1$
4. $x * y = x^2 + y^2 + 1$

Esercizio 225

Quali delle operazioni definite nell'esercizio precedente sono associative?

Esercizio 226

Trovare per ciascuna struttura l'elemento neutro:

$a)\ (N,+)$ $b)\ (N,\cdot)$ $c)\ (Z,+)$ $d)\ (Z,\cdot)$

Esercizio 227

Trovare per ciascuna struttura l'elemento neutro:

$a)\ (Q,+)$ $b)\ (Q,\cdot)$ $c)\ (R,+)$ $d)\ (R,\cdot)$

Esercizio 228

Trovare per ciascuna struttura l'elemento opposto:
$a)\ (N,+)$ $\quad b)\ (N,\cdot)$ $\quad c)\ (Z,+)$ $\quad d)\ (Z,\cdot)$

Esercizio 229

Trovare per ciascuna struttura l'elemento opposto:
$a)\ (Q,+)$ $\quad b)\ (Q,\cdot)$ $\quad c)\ (R,+)$ $\quad d)\ (R,\cdot)$

Esercizio 230

Completare la tabella

τ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

in modo che τ sia un'operazione associativa in $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

Esercizio 231

Data la struttura (N,τ)e la legge di composizione $x\tau y = x+y+xy$, calcolare $1\tau 2,\ 3\tau 6,\ (2\tau\ 5)\tau 3,\ 2\tau(5\tau 3)$. La struttura (N,τ) è un gruppo?

Esercizio 232

Sia A l'insieme $\{a,\ b\}$e τ la legge di composizione interna. Quali delle seguenti tabelle definiscono un gruppo?

a)

τ	a	b
a	a	b
b	a	a

b)

τ	a	b
a	b	b
b	a	a

c)

τ	a	b
a	a	b
b	a	b

Esercizio 233

Nell'insieme $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ sono definite le operazioni τ_1 e τ_2 che hanno la seguente tabella

a)

τ_1	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

b)

τ_2	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	2

Le strutture $(A,\ \tau_1)$ e $(A,\ \tau_2)$ sono gruppi?

Esercizio 234

Sia A l'insieme delle potenze di 2 a esponente intero. Dimostrare che $(A, \cdot)$ è un gruppo.

Esercizio 235

Dimostrare che $(Z,\ \tau)$, dove $a \tau b = a + b - 3$, è un gruppo.

Esercizio 236

Sia A l'insieme delle potenze di 3 a esponente intero. $(A, :)$ è un gruppo? Perché?